Algunas consideraciones sobre la descomposición de la inversa de Leontief

Autores: Xesús Pereira López[a] (xesus.pereira@usc.es); Melchor Fernández Fernández[b c] y André Carrascal Incera[b]

[a] Departamento de Economía Cuantitativa, [b] Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia (IDEGA) y [c] Departamento de Fundamentos del Análisis Económico

Universidade de Santiago de Compostela

Área Temática: Modelos input-output: aplicaciones al análisis regional

Resumen:

El concepto de multiplicador agregado desempeña un papel transcendental en las decisiones de política económica. De hecho, es una herramienta analítica de carácter recurrente, aunque no muestra los detalles de cómo los efectos multiplicadores inciden sobre toda la economía. Uno de los principales usos de la metodología input-output es la evaluación del efecto provocado, sobre un entramado económico, por los cambios en los elementos que le son exógenos. Si se utiliza el modelo input-output para cuantificar el impacto, o para efectuar previsiones, el resultado dependerá tanto de la exactitud de la inversa de Leontief como del vector de demanda final. En esta ocasión se centra la atención sobre la inversa.

En este artículo se abordan distintas descomposiciones de esta inversa y para cada una de ellas se reescribirá el modelo de demanda de la forma adecuada. Como se verá, las descomposiciones estudiadas son factibles desde el punto de vista matemático y solamente se diferencian por el criterio de normalización matricial. A modo de ejemplo, se tratará un estudio clásico: el análisis de los efectos de un *shock* en la producción de

un sector. Para ello hay que aislar la fila correspondiente al sector y trabajar con el modelo modificado.

Palabras Clave: *inversa de Leontief, descomposición, multiplicador, normalización.*

Clasificación JEL: *C67, D57.*

About the Leontief inverse decomposition

Subject Area: Input-output models: applications to regional analysis

Abstract:
The concept of aggregate multiplier plays a key role in economic policy assessments. In fact, it is an analytical tool commonly used, even without showing how the multiplier effects affect the different parts of the whole economy. One of the main uses of input-output methodology is to evaluate the macroeconomic effects caused by exogenous changes. Though, their results will be influenced by on the accuracy of both the Leontief inverse and the final demand vector. In this paper, the attention is paid to the inverse matrix.

The aim of this paper is to offer different decompositions of this inverse and their presentation in the traditional demand model. The feasibility of these decompositions is also proved, differing by the criterion of matrix standardization. The analysis of the sectoral productive effects of an exogenous shock is shown as an example of the decomposition procedure. This will require isolating the corresponding industrial row and consequently, work with the modified model.

Keywords: *Leontief inverse, decomposition, multiplier, standardization.*

JEL Codes: *C67, D57.*

1.- Introducción

Uno de los usos característicos de la metodología input-output (IO) es la evaluación del efecto provocado, sobre un determinado entramado económico, debido a cambios en las variables que le son exógenas. En efecto, cuando se producen cambios exógenos por la acción de un solo agente de impacto, y cuando se espera que los cambios que se produzcan en el corto plazo, se emplea generalmente el término "análisis de impacto". Por lo tanto, si se utiliza el modelo IO para cuantificar el impacto, o para efectuar previsiones, el resultado dependerá tanto de la exactitud de la inversa de Leontief como del vector de demanda final.

En este artículo se estudia la inversa de Leontief con detalle y, de modo más concreto, se abordan posibles descomposiciones para ella. Son varios los indicadores sintéticos, derivados de los elementos de la inversa, que se emplean habitualmente en el análisis de impacto y que son conocidos como multiplicadores IO. La noción de multiplicadores se basa en la diferencia entre el efecto inicial de cambios exógenos (demanda final) y los efectos totales provocados por ese cambio. En la literatura se encuentran numerosas referencias sobre multiplicadores IO, tal como Miernyk (1967), Miernyk *et al.* (1967), Schaffer (1976), Pleeter (1980) y Hewings (1985). Para mayor detallle, véanse entre otros a Miernyk (1976), Pibbs y Holsman (1981, 1982), Harrigan (1982), Katz y Burford (1981, 1982, 1985), Szyrmer (1992), Gim y Kim (1998), Sonis *et al*. (2000), Lenzen (2001), de Mesnard (2002), Oosterhaven y Stelder (2002), Jun (2004), Dietzenbacher (2005), Gim y Kim (2005), Liew (2005), Oosterhaven (2007) o Miller y Blair (2009). De modo más concreto, existe un debate acerca de la normalización más adecuada de la inversa de Leontief. Así, Sancho (2012) apunta que los multiplicadores IO de producción se emplean rutinariamente a la hora de tomar decisiones y una sociedad no puede permitir cálculos erróneos al respecto porque le resultaría costoso.

Por lo tanto, se afrontarán dos descomposiciones de la inversa de Leontief y, en consecuencia, se reescribirá el modelo de demanda de dos formas alternativas[1]. Como se verá, las dos descomposiciones son factibles desde el punto de vista matemático y solamente se diferencian por el criterio de normalización utilizado. Ahora bien, a partir de estas descomposiciones, se pueden obtener otras variantes.

[1] Aunque el modelo de Leontief se presenta por lo general de forma compacta, éste se puede reescribir según las necesidades de estudio. Así, a modo de ejemplo, se indica que Pereira *et al*. (2013) expresan el modelo de una manera específica para analizar la invertibilidad de la matriz Leontief.

2.- Aspectos preliminares

Con el firme objetivo de lograr idóneas descomposiciones de la inversa de Leontief para los analistas económicos, es preciso abordar –previamente– distintos conceptos. De forma especial, hay que recordar distintas desagregaciones de los elementos de la inversa, que por lo menos son viables desde el punto de vista matemático, para interpretarlas económicamente. El hecho de desagregar el impacto global conlleva ejecutar diversas transformaciones del modelo de demanda IO, por lo que las correspondientes formulaciones tienden a complicarse y a su vez se pueden reescribir de distintas maneras, tal como se verá posteriormente. Es así, que se considera esencial acertar con las expresiones analíticas adecuadas.

El modelo de demanda, o de Leontief, abierto se puede expresar del siguiente modo[2]:

$$x = (I - A)^{-1} y = Cy, \tag{1}$$

en donde *x* es el vector producción, la matriz $(I - A)^{-1}$ es la inversa de Leontief[3], que por comodidad se simplificará por medio de *C*, e *y* es el vector de demanda final neta de importaciones.

La inversa de Leontief se expresa normalmente como una serie de potencias matricial. En concreto, se expresa de la siguiente forma:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^m + \cdots. \tag{2}$$

Su elemento genérico es

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 + a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} + \cdots, & i = j \\ a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} + \cdots, & i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

Es inmediato comprobar que

$$C - I = A + A^2 + A^3 + \cdots = AC = CA. \tag{4}$$

[2] Hay que distinguir el modelo de demanda abierto del cerrado.

[3] Se recuerda que A es la matriz de coeficientes técnicos (de flujos totales). Su elemento genérico, denotado por a_{ij}, representa el input del sector *i* por unidad de output del sector *j*. Además, se considera que la economía se desagrega en *n* sectores.

En efecto,

$$AC = A(I + A + A^2 + \cdots) = A + A^2 + A^3 + \cdots = (I + A + A^2 + \cdots)A = CA, \tag{5}$$

es decir, las matrices A y C conmutan respecto al producto matricial.

Gim y Kim (1998) definen la matriz de requerimientos de inputs directos e indirectos

$$\Gamma^f = C - I, \tag{6}$$

según (4) su elemento genérico puede adoptar distintas expresiones, tal como se indica a continuación:

$$\gamma_{ij}^f = a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} + \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{kj}. \tag{7}$$

También es posible normalizar la matriz (6)

$$\Gamma^g(row) = \hat{D}^{-1} AC = \hat{D}^{-1} \Gamma^f, \tag{8}$$

en donde $\hat{D}$ es una matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal principal de C. Por lo que se estable una relación entre Γ^f y $\Gamma^g(row)$, nótese que $\Gamma^f = \hat{D}\Gamma^g(row)$. Esta relación ha sido estudiada por Jeong (1982, 1984) para los elementos de la diagonal principal de Γ^f, y posteriormente Gim y Kim (1998) la generalizaron para todos sus elementos. Para ello, estos autores se apoyaron en que $C(I - A) = I$. Una vez desarrollada esta propiedad se llega de inmediato a (8).

El elemento genérico de la matriz $\Gamma^g(row)$ es de la siguiente forma:

$$\gamma_{ij}^g(row) = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left(a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} + \cdots \right), \tag{9}$$

o bien,

$$\gamma_{ij}^g(row) = \frac{1}{\alpha_{ii}} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_{kj} = \frac{1}{\alpha_{ii}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{kj}. \tag{10}$$

Otros autores, tal como Szyrmer (1992) o Sancho (2012), efectúan la normalización de la matriz Γ^f por columnas. Incluso Gim y Kim (2008) renuncian a la normalización ahora explicada. Es decir, formulan alternativamente la matriz de requerimientos de inputs directos del siguiente modo:

$$\Gamma^g(col) = CA\hat{D}^{-1} = \Gamma^f \hat{D}^{-1}. \quad (11)$$

Por lo tanto,

$$\gamma_{ij}^g(col) = \frac{1}{\alpha_{jj}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{kj}. \quad (12)$$

Esta última expresión puede reescribirse de otras maneras, debido a las distintas sustituciones que proceden en relación al producto matricial CA. Para facilitar las interpretaciones económicas de las distintas matrices, tal vez sea mejor trabajar –al menos en el numerador– bien en términos de los coeficientes técnicos o bien en términos de los elementos de la inversa de Leontief.

En definitiva, se tienen dos nociones distintas dado que $\Gamma^g(row) \neq \Gamma^g(col)$. Ahora bien, se trata de ver cómo se encuadran estas matrices en el modelo de demanda, o precios, y estudiar cuál de ellas se considera la más apropiada para un determinado análisis. Por lo tanto, hay que valorar qué es más conveniente: enfocar la normalización de γ_{ij}^f según el efecto global, que es provocado por un incremento de la demanda final de un determinado producto *j*, de la relación de la rama productora *i* consigo misma; o realizar la normalización de acuerdo con el efecto global de la "autorrelación" de la rama productora *j*, que es en la que se da un incremento de la demanda final.

3.- Descomposiciones alternativas de la inversa de Leontief

La matriz *C* se puede desagregar de distintas formas. A continuación se verá cómo es posible reescribir el modelo (1) gracias a transformaciones algebraicas.

A partir de (1) se realiza la siguiente diferencia:

$$x - (I - A)x = Cy - (I - A)x, \quad (13)$$

dado que $(I - A)x = y$ se tiene que

$$Ax = Cy - y = (C - I)y. \quad (14)$$

A continuación, se premultiplican ambos miembros por la inversa de *A*.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}(C - I)y. \quad (15)$$

Ahora bien, para asegurarse que el determinante de A es no nulo se admite que ninguna estructura productiva es combinación lineal de las restantes.

Por lo tanto, se obtiene una expresión alternativa del modelo de demanda

$$x = A^{-1}(C - I)y = A^{-1}\Gamma^f y. \tag{16}$$

Véase que $C = A^{-1}\Gamma^f$.

Incluso, se alcanza más fácil (16) de acuerdo con (4). Véase que

$$x = Cy = ICy = A^{-1}ACy = A^{-1}(C - I)y = A^{-1}\Gamma^f y. \tag{17}$$

Alternativamente y según (4) también se puede reescribir el modelo (1)

$$x = Cy = CIy = CAA^{-1}y = (C - I)A^{-1}y = \Gamma^f A^{-1}y. \tag{18}$$

Por lo tanto, se deduce de (17) y (18) que Γ^f y A^{-1} conmutan respecto al producto.

En el siguiente paso se analiza el rol que desempeña $\Gamma^g(row)$ dentro del modelo de demanda. Con vistas a lograr este objetivo, se multiplican por la izquierda ambos miembros de (1) por la matriz de coeficientes técnicos

$$Ax = ACy, \tag{19}$$

a continuación, se realiza otra premultiplicación de dichos miembros por $\hat{D}^{-1}$

$$\hat{D}^{-1}Ax = \hat{D}^{-1}ACy. \tag{20}$$

Operando se tiene

$$x = [\hat{D}^{-1}A]^{-1}\hat{D}^{-1}ACy = [\hat{D}^{-1}A]^{-1}\Gamma^g(row)y = A^{-1}\hat{D}\Gamma^g(row)y. \tag{21}$$

Esta expresión también se obtiene introduciendo escalonadamente en (1) la matriz identidad. En efecto,

$$x = ICy = A^{-1}ACy = A^{-1}IACy = A^{-1}\hat{D}\hat{D}^{-1}ACy = A^{-1}\hat{D}\Gamma^g(row)y. \tag{22}$$

En donde

$$\Gamma^g(row) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & \frac{\alpha_{22}-1}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \cdots & \frac{\alpha_{nn}-1}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

En relación al “encaje” de $\Gamma^g(col)$ en el modelo de demanda, se procede de manera análoga a (22). Así se tiene que

$$x = CIy = CAA^{-1}y = CAIA^{-1}y = CA\hat{D}^{-1}\hat{D}A^{-1}y = \Gamma^g(col)\hat{D}A^{-1}y. \tag{24}$$

En donde

$$\Gamma^g(col) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{nn}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{22}-1}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{\alpha_{nn}-1}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

En consecuencia, se tiene que $\Gamma^g(col)\hat{D}A^{-1} = A^{-1}\hat{D}\Gamma^g(row)$.

Gim y Kim (2008) analizan la diferencia entre las matrices Γ^f y $\Gamma^g(col)$. De acuerdo con la línea expositiva empleada hasta el momento, se define

$$R(row) = \Gamma^f - \Gamma^g(row). \tag{26}$$

A partir de aquí se ve cómo se puede transformar la matriz C para destacar el papel de $R(row)$ dentro del modelo de demanda. Así si se efectúa la diferencia entre (14) y (20)

$$Ax - \hat{D}^{-1}Ax = ACy - \hat{D}^{-1}ACy, \tag{27}$$

con la particularidad de (4) se tiene que

$$Ax - \hat{D}^{-1}Ax = (C-I)y - \hat{D}^{-1}(C-I)y. \tag{28}$$

Operando

$$(I - \hat{D}^{-1})Ax = [(C-I) - \hat{D}^{-1}(C-I)]y. \tag{29}$$

Entonces, es factible reescribir el modelo de demanda

$$x=[(I-\hat{D}^{-1})A]^{-1}[(C-I)-\hat{D}^{-1}(C-I)]y. \tag{30}$$

O mejor aún

$$x=A^{-1}(I-\hat{D}^{-1})^{-1}[(I-\hat{D}^{-1})(C-I)]y. \tag{31}$$

Abreviadamente

$$x=A^{-1}(I-\hat{D}^{-1})^{-1}R(row)y, \tag{32}$$

en donde

$$R(row)=\begin{pmatrix} \frac{(\alpha_{11}-1)^2}{\alpha_{11}} & \frac{(\alpha_{11}-1)\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{(\alpha_{11}-1)\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{(\alpha_{22}-1)\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & \frac{(\alpha_{22}-1)^2}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{(\alpha_{22}-1)\alpha_{2n}}{\alpha_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(\alpha_{nn}-1)\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \frac{(\alpha_{nn}-1)\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \cdots & \frac{(\alpha_{nn}-1)^2}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Mediante la diferencia entre Γ^f y $\Gamma^g(col)$ se define $R(col)$. Asimismo, si se realizan distintas operaciones se busca una expresión en función de $(C-I)$. Véase que

$$R(col)=\Gamma^f-\Gamma^g(col)=(C-I)-(C-I)\hat{D}^{-1}=(C-I)(I-\hat{D}^{-1}). \tag{34}$$

En donde

$$R(col)=\begin{pmatrix} \frac{(\alpha_{11}-1)^2}{\alpha_{11}} & \frac{(\alpha_{22}-1)\alpha_{12}}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{(\alpha_{nn}-1)\alpha_{1n}}{\alpha_{nn}} \\ \frac{(\alpha_{11}-1)\alpha_{21}}{\alpha_{11}} & \frac{(\alpha_{22}-1)^2}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{(\alpha_{nn}-1)\alpha_{2n}}{\alpha_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(\alpha_{11}-1)\alpha_{n1}}{\alpha_{11}} & \frac{(\alpha_{22}-1)\alpha_{n2}}{\alpha_{22}} & \cdots & \frac{(\alpha_{nn}-1)^2}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

A partir de (24) se obtiene la transformación del modelo de tal forma que se hace visible la matriz $R(col)$. Así

$$x=CAA^{-1}y=(C-I)A^{-1}y=(C-I)IA^{-1}y=(C-I)(I-\hat{D}^{-1})(I-\hat{D}^{-1})^{-1}A^{-1}y. \tag{36}$$

Es decir,

$$x=R(col)(I-\hat{D}^{-1})^{-1}A^{-1}y. \tag{37}$$

Por lo tanto, se manifiesta que $A^{-1}(I-\hat{D}^{-1})^{-1}R(row)=R(col)(I-\hat{D}^{-1})^{-1}A^{-1}$.

La inversa de Leontief se puede desagregar de distintas formas y en ellas surge –bien de modo explícito o implícito– una serie de potencias matricial. La clave está en buscar la expresión analítica que favorezca la descomposición de C y sobre todo la correspondiente interpretación económica.

La cuestión es saber si procede normalizar α_{ij} de acuerdo con el valor de α_{ii} o α_{jj}. Las dos opciones son posibles desde el punto de vista algebraico pero hay que averiguar cuál de ellas es la adecuada, todo ello condicionado por el tipo de estudio. El valor α_{ij} mide un efecto sobre el sector *i* como consecuencia de una alteración en la demanda final del producto *j*, pero este incremento también conlleva un incremento en la producción del sector *j*, que a su vez provoca una serie de efectos sobre el resto de la economía, que son susceptibles de uso (a modo de ponderación) en el momento de efectuar la descomposición del elemento genérico de la inversa de Leontief.

Algunos de los desarrollos anteriores conducen a una de las posibles descomposiciones de la inversa de Leontief

$$C=I+(C-I)\hat{D}^{-1}+[(C-I)(I-\hat{D}^{-1})]. \tag{38}$$

Obsérvese que

$$C=I+(C-I)=I+(C-I)+(C-I)\hat{D}^{-1}-(C-I)\hat{D}^{-1}, \tag{39}$$

al reordenar los sumandos es prácticamente inmediato obtener la descomposición indicada.

Por lo tanto, el modelo de demanda se puede reescribir de la siguiente forma:

$$x=y+(C-I)\hat{D}^{-1}y+[(C-I)(I-\hat{D}^{-1})]y, \tag{40}$$

o abreviadamente

$$x=y+\Gamma^{g}(col)y+R(col)y. \tag{41}$$

De tal modo que se tiene una descomposición de la producción por destinos: demanda final, el efecto (normalizado) directo sobre la producción del sector motivado por la demanda final y los restantes efectos (también normalizados) sobre la producción del sector *i* a través de las distintas rondas.

Ahora, se considera necesario analizar el elemento genérico de la descomposición ahora indicada de *C*. En principio se cree conveniente diferenciar los elementos de la diagonal principal de los restantes. Así, el elemento genérico de la diagonal principal, α_{ii}, se puede transformar del siguiente modo:

$$\alpha_{ii} - 1 = (\alpha_{ii} - 1)\frac{\alpha_{jj}}{\alpha_{jj}}, \quad \forall i = j. \tag{42}$$

Dado que

$$\alpha_{jj} = 1 + a_{jj} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{jk_1} a_{k_1k_2} a_{k_2 j} + \cdots \tag{43}$$

se tiene que

$$\alpha_{ii} - 1 = (\alpha_{ii} - 1)\frac{1 + a_{jj} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{kj} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{jk_1} a_{k_1k_2} a_{k_2 j} + \cdots}{\alpha_{jj}}, \tag{44}$$

Operando

$$\alpha_{ii} = 1 + (\alpha_{ii} - 1)\frac{1}{\alpha_{jj}} + (\alpha_{ii} - 1)\frac{a_{jj}}{\alpha_{jj}} + (\alpha_{ii} - 1)\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{kj}}{\alpha_{jj}} + (\alpha_{ii} - 1)\frac{\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{jk_1} a_{k_1k_2} a_{k_2 j}}{\alpha_{jj}} + \cdots, \tag{45}$$

En relación a los restantes elementos, se procede de forma análogamente. Así, dado que

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\frac{\alpha_{jj}}{\alpha_{jj}}, \quad \forall i \neq j, \tag{46}$$

se tiene que

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\frac{1}{\alpha_{jj}} + \alpha_{ij}\frac{a_{jj}}{\alpha_{jj}} + \alpha_{ij}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} a_{kj}}{\alpha_{jj}} + \alpha_{ij}\frac{\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{jk_1} a_{k_1k_2} a_{k_2 j}}{\alpha_{jj}} + \cdots. \tag{47}$$

Ahora bien, si se considera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j. \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{48}$$

es posible obtener una única expresión para el elemento genérico de *C*. De hecho, para cualquier elemento de la inversa de Leontief, se tiene que

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\frac{1}{\alpha_{jj}} + (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\frac{a_{jj}}{\alpha_{jj}} + (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{kj}}{\alpha_{ii}} + \\ + (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\frac{\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{jk_1}a_{k_1k_2}a_{k_2j}}{\alpha_{ii}} + \cdots, \quad \forall i, j. \tag{49}$$

Por lo tanto, el incremento de la producción del sector *i* motivado por el incremento de la demanda del producto *j*, α_{ij}, se desagrega de acuerdo con el posible efecto de la demanda final (evidentemente que si $i \neq j$ no tiene lugar dicho efecto) y los efectos provocados sobre la producción del sector *j* a través de las distintas rondas de requerimientos de inputs. Cada uno de los sumandos irá disminuyendo en valor y son prácticamente nulos para una determinada ronda (finita).

De forma abreviada, se tiene que

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}^{g}(col) + r_{ij}(col), \quad \forall i, j. \tag{50}$$

También es posible realizar otra descomposición de la inversa de Leontief. En concreto,

$$C = I + \hat{D}^{-1}(C - I) + (C - I) - \hat{D}^{-1}(C - I). \tag{51}$$

Por lo tanto, el modelo de demanda también se puede reescribir

$$x = y + \hat{D}^{-1}(C - I)y + [(I - \hat{D}^{-1})(C - I)]y, \tag{52}$$

o, de forma alternativa,

$$x = y + \Gamma^{g}(row)y + R(row)y. \tag{53}$$

De tal modo que

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}^{g}(row) + r_{ij}(row), \quad \forall i, j. \tag{54}$$

Por lo que se manifiesta que el modelo de demanda se puede escribir de distintos modos. Lo mismo sucede con el modelo de precios.

4.- Extracción hipotética parcial y normalización matricial

El método de extracción hipotética se le atribuye a Strassert (1968), aunque fue sugerido previamente por de Caevel *et al*. (1965). Después, Miller (1966) lo planteó en el ámbito del análisis regional. Este método consiste en suponer que un sector productivo es extraído y acto seguido se calcula el impacto –a través del modelo de Leontief– de esa supresión hipotética sobre el resto de sectores de la economía, Strassert (1968). Esta idea recibió numerosas críticas y en consecuencia aparecen otras variantes como las efectuadas por Meller y Marfán (1981), Cella (1984, 1986) o Dietzenbacher y van der Linden (1997).

En efecto, Dietzenbacher y van der Linden (1997) matizaron la propuesta inicial a través de una extracción de carácter parcial. Se trata de eliminar sólo la columna de la rama productiva j, respetando su oferta, lo que permitiría conocer la cuantía de sus relaciones hacia atrás de forma individualizada. Así, es necesario desagregar la matriz de coeficientes técnicos, A, en cuatros submatrices[4]:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{55}$$

en donde A_{11} y A_{11} se convierten en matrices nulas al eliminar la columna. Es decir

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ y la inversa asociada } C^* = \begin{pmatrix} I & A_{12}C_{22} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{56}$$

se entiende que C_{22} es la inversa de $(I - A_{22})$, matriz de Leontief de orden $n-1$.

La extracción de una única fila permitiría, estimar las relaciones de dicha rama hacia delante, que también se puede abordar de forma muy similar a través del modelo de Ghosh. Estas dos alternativas de extracción parcial responden en parte a los criterios de normalización por filas y columnas, de forma respectiva.

De hecho, también se pueden realizar normalizaciones directamente sobre la inversa de Leontief. Así se tienen las siguientes normalizaciones por filas:

$$\overline{C}^{f}(row) = \hat{D}^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 1 & \cdots & \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

[4] Para facilitar la explicación se supone que se elimina el primer sector.

y

$$\overline{C}^{g}(row) = (I - \hat{D}^{-1})C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}-1 & \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}}\alpha_{12} & \cdots & \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}}\alpha_{1n} \\ \frac{\alpha_{22}-1}{\alpha_{22}}\alpha_{21} & \alpha_{22}-1 & \cdots & \frac{\alpha_{22}-1}{\alpha_{22}}\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{nn}-1}{\alpha_{nn}}\alpha_{n1} & \frac{\alpha_{nn}-1}{\alpha_{nn}}\alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

La matriz (57) relativiza –por filas– los elementos de C en función del multiplicador de la diagonal principal (asociado a la rama productora). La matriz (58) se construye de un modo análogo, con la única salvedad de que las transformaciones están condicionadas por los efectos dados por la expresión $(\alpha_{ii}-1), i = 1, 2, \ldots, n.$ Es decir, se le excluye el efecto directo de la demanda final a los multiplicadores que surgen en (57).

De forma análoga, se obtienen las normalizaciones por columnas de la inversa se Leontief: $\overline{C}^{f}(col) = C\hat{D}^{-1}$ y $\overline{C}^{g}(col) = C(I - \hat{D}^{-1}).$

A continuación, se efectúa la transformación del modelo de demanda para visualizar el rol que desempeña la normalización por filas. Así, si se considera (1) y se realiza una modificación concreta surge la siguiente descomposición de la inversa de Leontief:

$$\begin{aligned} x &= Cy = ICy = (\hat{D}^{-1} + I - \hat{D}^{-1})Cy = \\ &= [\hat{D}^{-1}C + (I - \hat{D}^{-1})C]y = \hat{D}^{-1}Cy + (I - \hat{D}^{-1})Cy \end{aligned} \quad (59)$$

De acuerdo con (57) y (58), se tiene

$$x = \overline{C}^{f}(row)y + \overline{C}^{g}(row)y, \quad (60)$$

por lo que $\overline{C}^{g}(row) = C - \overline{C}^{f}(row).$

A modo de ejemplo, se considera la primera ecuación del sistema (1)

$$x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n, \quad (61)$$

para desagregar la producción de acuerdo con el peso que desempeña la demanda final y el peso de los efectos motivados por las interrelaciones sectoriales del multiplicador asociado al autoconsumo de la rama productora 1, α_{11}. En efecto, los pesos señalados son $\frac{1}{\alpha_{11}}$ y $\frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}}$.

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\alpha_{11}} x_1 + \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}} x_1 = \\ &= [y_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} y_2 + \ldots + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} y_n] + [(\alpha_{11}-1) y_1 + \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}} \alpha_{12} y_2 + \ldots \frac{\alpha_{11}-1}{\alpha_{11}} \alpha_{1n} y_n]. \end{aligned} \tag{62}$$

Los multiplicadores $\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}$ se corresponden con los elementos de la submatriz $A_{12}C_{22}$, que aparece en el método de Dietzenbacher y van der Linden. A partir de aquí es fácil obtener el impacto de la extracción por columna de la rama, obsérvese que según lo indicado en (56) el cálculo de C_{22} es inmediato a partir de A_{22}.

En definitiva, la normalización por filas enlaza con la extracción parcial por columnas.

5.- Generalización del modelo mixto de demanda

Uno de los estudios característicos en la metodología IO consiste en analizar las consecuencias, sobre una determinada economía, ante un *shock* en la producción de un sector. Para ello hay que aislar en el modelo de demanda la fila correspondiente al sector y trabajar con el modelo modificado.

El modelo mixto de Leontief consiste en replantear el sistema $(I-A)x = y$ de un modo sencillo, que consiste en aislar la fila de correspondiente al sector en el que se produce el *shock*, véase Miller y Blair (2009).

En concreto, se altera la ecuación *i*-ésima del sistema según se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & & (1-a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{63}$$

que abreviadamente se puede expresar $(I - A^{\{-i\}})x = y^{\{-i\}}$. Por lo tanto, el modelo (1) se modifica y resulta $x = (I - A^{\{-i\}})^{-1} y^{\{-i\}}$, o $x = C^{\{-i\}} y^{\{-i\}}$. Además este modelo es susceptible de uso porque está calibrado.

La modificación descripta se emplea habitualmente para cuantificar los impactos provocados por el *shock* en la producción de un determinado sector sobre el resto de los sectores productivos. Véanse, entre otros, las aplicaciones prácticas de Roberts (1994), Helming y Peerlings (2003) o Steinback (2004).

Para medir los efectos sobre otras ramas productivas, hay que acudir a los elementos de la columna *i* (asociada al sector *i*) de $C^{\{-i\}}$. Probablemente sea oportuno intercambiar también los subíndices *i* y *j* para evitar errores de interpretación, dado que al calcular la inversa se intercambian las perspectivas de filas por las de las columnas; así se hace ahora.

El elemento genérico de la inversa de Leontief que resulta de aislar el sector *j*, que se puede denotar por $\alpha_{ij}^{\{-j\}}$, es el efecto multiplicador sobre el sector *i* que se produce ante el incremento de la producción del sector *j*.

Así, para cada *j* se tiene que

$$x_i = \alpha_{ij}^{\{-j\}} x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha_{ik}^{\{-j\}} y, \quad \forall i \neq j. \tag{64}$$

Por lo tanto, se puede comprobar que para un sector *j*, se tiene que

$$\alpha_{ij}^{\{-j\}} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{jj}}, \ \forall i. \tag{65}$$

Es decir, se recurre a una normalización concreta, precisamente en la que influye el sector en el que se produce el *shock*. Esta normalización es la empleada para construir $\Gamma^g(col)$, véase (25). En consecuencia los elementos de una determinada columna de $\Gamma^g(col)$ –con la excepción de los elementos que pertenecen a la diagonal principal– son los efectos producidos sobre las restantes ramas ante un *shock* en la producción de la rama asociada a la columna.

Conclusiones

En este artículo se pone de manifiesto que las normalizaciones de la inversa de Leontief están presentes en diversos estudios dentro del análisis económico, tal como en la extracción hipotética parcial o en la elaboración del modelo mixto de demanda. En futuras investigaciones y en relación a otras herramientas encuadradas en la metodología IO, también se podrían abordar alguna de las descomposiciones de la inversa de Leontief –aquí tratadas–, por ejemplo en el análisis de descomposición estructural, para buscar expresiones alternativas que aporten una mayor eficacia a dicha técnica.

Es posible efectuar normalizaciones (específicas) por filas y columnas, pero hay que diferenciarlas e interpretarlas debidamente. Por eso, se cree que la mejor forma de detectar la normalización apropiada de la inversa de Leontief es reescribir el modelo de demanda o precios, según las necesidades analíticas, y ver el rol que cumplen las distintas matrices que surgen de la descomposición de la inversa. Es más, se considera que estudiar de forma aislada las matrices normalizadas no es recomendable porque se pueden cometer fácilmente errores de interpretación, debido en parte a la complejidad de sus elementos. Además, es obligatorio garantizar el equilibrio contable y que mejor forma de garantizarlo al realizar las transformaciones –paso a paso– en el correspondiente sistema de ecuaciones.

Referencias bibliográficas

Caevel, J. de, Degueldre, J. and Paelinck, J.H.P. (1965): "Analyse quantitative de certains phénomènes du développement régional polarisé, Essai de simulation statique d´itinéraires de propagation", *Collection de l´Institut de Science Economique de l´Université de Liège*, Paris et Genève.

Cella, G. (1984): "The input-output measurement of interindustry linkages", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 46, No. 1, pp. 73–84.

Cella, G. (1986): "The input-output measurement of interindustry linkages: a reply", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 48, No. 4, pp. 379–384.

Dietzenbacher, E. (2005): "More on multipliers", *Journal of Regional Science,* Vol. 45, No. 2, pp. 421–426.

Dietzenbacher, E. and Linden, J. van der (1997): "Sectoral and spatial linkages in the EC production structure", *Journal of Regional Science*, Vol. 37, No. 2, pp. 235–257.

Gim, H.U. and Kim, K. (1998): "The general relation between two different notions of direct and indirect input requirements", *Journal of Macroeconomics*, Vol. 20, No. 1, pp. 199–208.

Gim, H.U. and Kim, K. (2005): "The decomposition by factors in direct and indirect requirements: with applications to estimating the pollution generation", *Korean Economic Review*, Vol. 21, pp. 309–325.

Harrigan, F.J. (1982): “The estimation of input-output type output multipliers when no input-output model exists: a comment”, *Journal of Regional Science*, Vol. 22, No. 3, pp. 375–381.

Helming, J. and Peerlings, J. (2003): “Effects of EU dairy policy reforms for Dutch agriculture and economy: Applying an agricultural programming/mixed input–output model”, in *25th International Conference of Agricultural Economics*, 16-22 August, Durban, South Africa.

Hewings, G.J.D. (1985): *Regional Input-Output Analysis*, Sage Publications, Beverly Hills.

Jensen, R.C. and Hewings, G.J.D. (1985a): “Shortcut 'input-output' multipliers: a requiem”, *Environment and Planning A*, Vol. 17, No. 6, pp. 747–759.

Jensen, R.C. and Hewings, G.J.D. (1985b): “Shortcut 'input-output' multipliers: the resurrection problem (a reply)”, *Environment and Planning A*, Vol. 17, No. 11, pp. 1551–1552.

Jensen, R.C. and West, G.R. (1980): “The effects of relative coefficient size on input-output multipliers”, *Environment and Planning A*, Vol. 12, No. 6, pp. 659–670.

Jeong, K. (1982): “Direct and indirect requirements: a correct economic interpretation of the Hawkins-Simon conditions”, *Journal of Macroeconomics*, Vol. 4, No. 3, pp. 349–356.

Jeong, K. (1984): “The relation between two different notions of direct and indirect input requirements”, *Journal of Macroeconomics*, Vol. 6, No. 4, pp. 473–476.

Jun, M.J. (2004): “A metropolitan input-output model: multisectoral and multispatial relations of production, income formation, and consumption”, *The Annals of Regional Science*, Vol. 38, No. 1, pp. 131–147.

Katz, J.L. and Burford, R.L. (1981): “A comparison of estimators of output multipliers from incomplete input-output data”, *The Annals of Regional Science*, Vol. 15, No. 2, pp. 39–54.

Katz, J.L. and Burford, R.L. (1982): “The estimation of input-output type output multipliers when no input-output model exists: a reply”, *Journal of Regional Science*, Vol. 22, No. 2, pp. 383–387.

Katz, J.L. and Burford, R.L. (1985): “Shortcut formulas for output, income and employment multipliers”, *The Annals of Regional Science*, Vol. 19, No. 2, pp. 61–76.

Lenzen, M. (2001): “A generalized input-output multiplier calculus for Australia”, *Economic System Research*, Vol. 13, No. 1, pp 65–92.

Liew, C.J. (2005): “Dynamic variable input-output (VIO) model and price-sensitive dynamic multipliers”, *Annals of Regional Science*, Vol. 39, No. 3, pp. 607–627.

Meller, P. and Marfán, M. (1981): “Small and large industry: employment generation, linkages and key sectors”, *Economic Development and Cultural Change*, Vol. 29, No. 2, pp. 263–274.

Mesnard, L. de (2002): “Note about the concept of 'net multipliers'“, *Journal of the Regional Science*, Vol. 42, No. 3, pp. 545–548.

Miernyk, W.H. (1967): *The Elements of Input-Output Analysis*, Random House, New York.

Miernyk, W.H. (1976): “Comments on recent developments in regional input-output analysis”, *International Regional Science Review*, Vol. 1, No. 2, pp. 47–55.

Miernyk, W.H., Bonner, E.R., Chapman, Jr.J.H. and Shellhamer, K.L. (1967): *Impact of the Space Program on a Local Economy*: *An Input-Output Analysis*, McClain, Morgantown, West Virginia.

Miller, R. (1966): “Interregional feedback effects in input-output models: some preliminary results”, *Papers of the Regional Science Association*, Vol. 17, No. 1, pp. 105–125.

Miller, R. and Blair, P. (2009): *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*. 2nd Ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Oosterhaven, J. (2007): “The net multiplier is a new key sector indicator: reply to de Mesnard’s comment”, *Annals of Regional Science*, Vol. 41, No. 2, pp. 273–283.

Oosterhaven, J. and Stelder, D. (2002): “Net multipliers avid exaggerating impacts: with a bi-regional illustration for the Dutch transportation sector”, *Journal of Regional Science*, Vol. 42, No. 3, pp. 533–543.

Pereira, X.; Quiñoá, J.L. and Fernández, M. (2013): “Análisis de la estabilidad de una economía con desequilibrios sectoriales”, *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, Vol. 15, No. 1, pp. 168-187.

Pibbs, P.J. and Holsman, A.J. (1981): “An evaluation of the Burford Katz short-cut technique for deriving input-output multipliers”, *Annals of Regional Science*, Vol. 15, No. 3, pp. 11–19.

Pibbs, P.J. and Holsman, A.J. (1982): “Estimating input-output multipliers: a new hybrid approach”, *Environment and Planning*, Vol. 14, No. 3, pp. 335–342.

Pleeter, S. (1980): *Economic Impact Analysis: Methodology and Applications*, Martinus Nijhoff, Boston.

Roberts, D. (1994): “A modified Leontief model for analysing the impact of milk quotas on the wider economy”, *Journal of Agricultural Economics*, Vol. 45, No. 1, pp. 90–101.

Sancho, F. (2012): “Straightening out the concept of direct and indirect input requirements”, *Economics Bulletin*, Vol. 32, No. 1, pp. 502–509.

Sandoval, A.D. (1967): “Constant relationship between input-output multipliers”, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 49, No. 4, pp. 599–600.

Schaffer, W.A. (1976): *On the Use of Input-Output Models for Regional Planning*, Martinus Nijhoff, Leiden.

Sonis, M., Hewings, G.J.D. and Guo, J. (2000): “A new image of classical key sector analysis: minimum information decomposition of the Leontief inverse”, *Economic System Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 401–423.

Steinback, S. (2004): “Using ready-made regional input-output models to estimate backward-linkage effects of exogenous output shocks”, *The Review of Regional Studies*, Vol. 34, No. 1, pp. 57–71.

Strassert, G. (1968): “Zur bestimmung strategischer sektoren mit hilfe von input-output modellen”, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Vol. 182, No 3, pp. 211–215.

Szyrmer, J.M. (1992): “Input-output coefficients and multipliers from a total flow perspective”, *Environmental and Planning A*, Vol. 24, No. 7, pp. 921–937.